Farault

Théorème de Von Neumann

<u>Théorème :</u> Soient G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\}$. Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathfrak{g}$ et un voisinage $\mathcal{V}$ de I_n dans G tels que $\exp : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

<u>Démonstration :</u>

• <u>Lemme :</u> Soit S un supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans S tel que $\exp(\mathcal{U}) \cap G \neq \{I_n\}$.

→ <u>Preuve du lemme :</u> On raisonne par l'absurde. On suppose que, pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans S, on a $\exp(\mathcal{U}) \cap G \neq \{I_n\}$. On fixe alors une suite (X_k) d'éléments de S tendant vers 0 telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $g_k = \exp(X_k) \in G \setminus \{I_n\}$.

Par compacité, on fixe une extraction σ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\dfrac{X_{\sigma(k)}}{\|X_{\sigma(k)}\|} \xrightarrow[k \to +\infty]{} X$.

Le sous-espace S étant fermé, on a $X \in S$. On va montrer que $X \in \mathfrak{g}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $\lambda_k(t) = \dfrac{t}{\|X_{\sigma(k)}\|}$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a } \exp(tX) = \lim_{k \to +\infty} \exp\left(\lambda_k(t) X_{\sigma(k)}\right)$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \exp(X_{\sigma(k)})^{\lfloor \lambda_k(t) \rfloor} \exp\left((\lambda_k(t) - \lfloor \lambda_k(t) \rfloor) X_{\sigma(k)}\right)$$

Or $\|(\lambda_k(t) - \lfloor \lambda_k(t) \rfloor) X_{\sigma(k)}\| \leq \|X_{\sigma(k)}\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$,

donc $\exp(tX) = \lim\limits_{k \to +\infty} \exp(X_{\sigma(k)})^{\lfloor \lambda_k(t) \rfloor} = \lim\limits_{k \to +\infty} g_{\sigma(k)}^{\lfloor \lambda_k(t) \rfloor} \in G$,

car $g_{\sigma(k)}^{\lfloor \lambda_k(t) \rfloor} \in G$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et G est fermé.

Ceci donne $X \in \mathfrak{g}$. Finalement, $X \in S \cap \mathfrak{g} = \{0\}$, donc $X = 0$, ce qui est absurde, car chaque $\dfrac{X_{\sigma(k)}}{\|X_{\sigma(k)}\|}$ est de norme 1, donc X est de norme 1.

On passe maintenant à la preuve du théorème.

Soient S un supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times S & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (X,Y) & \longmapsto & \exp(X)\exp(Y) \end{array}$.

Alors Φ est $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $(X,Y) \in \mathfrak{g} \times S$, on a $d\Phi_{(0,0)}(X,Y) = X + Y$.

Donc $d\Phi_{(0,0)}$ est inversible. Par inversion locale, on fixe $\mathcal{U}$ un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$

$\mathcal{V}$ $\quad$ 0 $\quad$ S

$\mathcal{W}$ $\quad$ I_n $\quad$ $GL_n(\mathbb{R})$

tels que $\Phi_{|\mathcal{U} \times \mathcal{V}}$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ sur $\mathcal{W}$.

On a $\exp(\mathcal{U}) = \Phi(\mathcal{U} \times \{0\}) \subset \mathcal{W} \cap G$. Le lemme permet, quitte à réduire $\mathcal{V}$ (et $\mathcal{W}$), de supposer que $\exp(\mathcal{V}) \cap G = \{I_n\}$. On va montrer que $\exp \mathcal{U} = \mathcal{W} \cap G$.

Soit $g \in \mathcal{W} \cap G$. On écrit $g = \exp X \exp Y$, avec $X \in \mathcal{U}$, $Y \in \mathcal{V}$.

On a $\exp Y = \exp(-X) g \in \exp \mathcal{V} \cap G = \{I_n\}$, donc $g = \exp X$.

Ceci achève la preuve du théorème.

<u>Corollaire :</u> Un sous-groupe fermé G de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>Démonstration :</u> Soit $g \in G$. On pose $L(g) : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ h & \longmapsto & gh \end{array}$. Soient $\mathcal{U}$ un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{W}_0$ un voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ tels que $\exp : \mathcal{U} \to \mathcal{W}_0$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $\exp(\mathcal{U} \cap \mathfrak{g}) = \mathcal{W}_0 \cap G$. L'application $\Phi = L(g) \circ \exp$ est alors un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{W} = g\mathcal{W}_0$ envoyant $\mathcal{U} \cap \mathfrak{g}$ sur $\mathcal{W} \cap G$.

Ceci montre que G est une sous-variété de $GL_n(\mathbb{R})$.

Compléments : Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$.

On pose $\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, \forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tX) \in G\}$. Alors $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour ce faire, on utilisera le lemme suivant :

Lemme : Soient $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $\exp(X+Y) = \lim\limits_{m \to +\infty} \left[\exp\frac{X}{m} \exp\frac{Y}{m}\right]^m$.

→ Preuve du lemme : On commence par fixer un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels
$\mathcal{V}$ I_n $GL_n(\mathbb{R})$

que $\exp_{|\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \geq N$, on ait $\frac{X}{m}, \frac{Y}{m} \in \mathcal{U}$ et $\exp\frac{X}{m}\exp\frac{Y}{m} \in \mathcal{V}$,

et on pose $\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (M, M') & \longmapsto & \exp M \exp M' \end{array}$.

Pour tout $m \geq N$, on a
$$d(\exp_{|\mathcal{U}}^{-1} \circ \Phi)_{(0,0)}\left(\frac{X}{m}, \frac{Y}{m}\right) = d(\exp_{|\mathcal{U}}^{-1})_{I_n} \circ d\Phi_{(0,0)}\left(\frac{X}{m}, \frac{Y}{m}\right)$$
$$= d\exp_0^{-1}\left(\frac{X+Y}{m}\right)$$
$$= \frac{X+Y}{m}$$

donc, par Taylor-Young, on a $\exp_{|\mathcal{U}}^{-1}\left(\exp\frac{X}{m}\exp\frac{Y}{m}\right) = \frac{X+Y}{m} + o\left(\frac{1}{m}\right)$,

d'où $m\exp_{|\mathcal{U}}^{-1}\left(\exp\frac{X}{m}\exp\frac{Y}{m}\right) = X + Y + o(1)$,

ce qui donne $\left(\exp\frac{X}{m}\exp\frac{Y}{m}\right)^m = \exp\left(m\exp_{|\mathcal{U}}^{-1}\left(\exp\frac{X}{m}\exp\frac{Y}{m}\right)\right) \xrightarrow[m \to +\infty]{} \exp(X+Y)$.

On passe à la preuve du résultat : $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On a $\mathfrak{g} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $0 \in \mathfrak{g}$.
- Soient $X \in \mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda X \in \mathfrak{g}$.

• Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\exp \frac{tX}{n}$, $\exp \frac{tY}{n} \in G$,

donc $\left(\exp \frac{tX}{n} \exp \frac{tY}{n}\right)^n \in G$, donc, comme G est fermé, on a

$\exp(t(X+Y)) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\exp \frac{tX}{n} \exp \frac{tY}{n}\right)^n \in G$. Ceci étant valable

pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $X + Y \in \mathfrak{g}$.

Ceci prouve que $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On peut également montrer que pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$, on a $XY - YX \in \mathfrak{g}$,

en utilisant la formule $\exp(XY - YX) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\exp \frac{X}{n} \exp \frac{Y}{n} \exp -\frac{X}{n} \exp -\frac{Y}{n}\right)^{n^2}$.